Límites

f(x) tiende a un punto

Polinómicas

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Racionales:

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios

- Si $Q(a) \neq 0 \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- Si $Q(a) = 0$ y $P(a) = 0 \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = ind$, se resuelve simplificando.
- Si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0 \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = ind$, se resuelve hallando límites laterales:
  - Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
  - Si $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \nexists$

A trozos:

- Si $f(x) = \begin{cases} k & \text{si} \quad x = a \\ g(x) & \text{si} \quad x \neq a \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$
- Si $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x < a \\ h(x) & \text{si} \quad x > a \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to a} f(x)$ existe si $\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} h(x)$

Potencias:

$$\lim_{x\to a} \left[f(x)^{g(x)} \right] = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

f(x) tiende a más o menos infinito

Polinómicas:

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

Inversas:

Sea $f(x)$ un polinomio, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{k}{f(x)} = 0$

Racionales

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$

- Si n>m: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \pm\infty$ El signo depende de a_n, b_n y de si $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$
- Si n<m: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$
- Si n=m: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$

Irracionales

Si aparece la indeterminación $\infty - \infty$, es recomendable racionalizar o multiplicar por el conjugado del numerador.

Potencias

Si $\lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty,\ a > 1$

Si $\lim_{x\to +\infty} a^x = 0,\ -1 < a < 1$

Si $\lim_{x\to +\infty} a^x = \nexists,\ a < -1$

Asíntotas y continuidad

Asíntotas

Asíntotas horizontales: Calcular $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Asíntotas verticales: Sean x_i valores que $\notin D(x)$, calcular: $\lim_{x \to x_i^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_i^-} f(x)$

Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$, donde $m = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ y $n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right)$

Existen asíntotas oblicuas en los cocientes de polinomio cuyo grado del numerador sea mayor en una unidad que el grado del denominador.

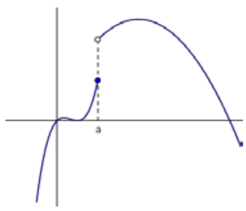
La asíntota $y = mx + n$ se obtiene también al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$

Continuidad:

Una función es continua en $x = a$ si:

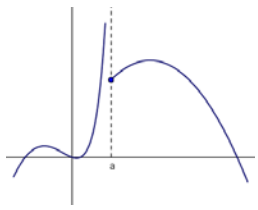
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe $\longrightarrow$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$
- La función está definida en ese punto $\longrightarrow$ $\exists\ f(a)$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Discontinuidad no evitable



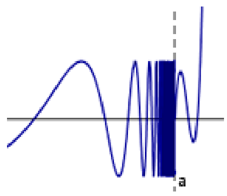
Salto finito

Límites laterales existen y son finitos, pero de valor diferente



Salto infinito

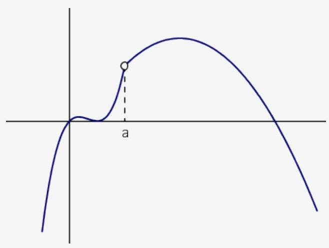
Límites laterales existen, pero alguno de ellos es infinito



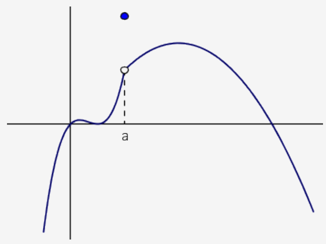
Discontinuidad esencial

Algún límite no existe

Discontinuidad evitable



Límites laterales coinciden, pero la función no está definida en ese punto



Límites laterales coinciden, pero son distintos al valor de la función en ese punto